

完全 m 部图 $K_{m(r)}$ 的谱

袁晓莉, 郭大昌

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006)

摘要: 关于带有参数 (n, k, a, c) 的强正则图, 它的特征值具有如下性质: 其中有一个特征值是度数 k , 它的重数取决于图的连通分支数. 另外两个特征值分别是方程 $x^2 - (a - c)x - (k - c) = 0$ 的两个根为 θ, T . 其重数 m_θ, m_T 满足这样的等式: $m_\theta + m_T = n - 1, k + m_\theta\theta + m_T T = 0$. 通过这样的性质, 由强正则图可以容易得到它的谱. 通过这一方法研究一类完全 m 部图 $K_{m(r)}$ 的谱.

关键词: 强正则图; 完全 m 部图 $K_{m(r)}$; 谱; 非本原图

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2008)02-0035-03

1 相关定义

定义 1 图 G 是度为 k 的正则图, 如果它满足: 每对相邻点都有 a 个共同的邻域点, 每对不相邻点有 c 个共同的邻域点. 称图 G 是具有参数 (n, k, a, c) 的强正则图.

显然, 空图以及完全图不是强正则图. 而 C_5 就是强正则图 $(5, 2, 0, 1)$, 另外一类著名的图 Peterson 图也是强正则图, 参数为 $(10, 3, 0, 1)$.

通常, I 定义为单位矩阵, 是图 G 的邻接矩阵. J 表示矩阵元素全为 1 的矩阵, 由此得到 $J - I - A$ 是图 G 的补图 $\bar{G}$ 的邻接矩阵.

引理 1^[1-2] G 是非完全图和非空图, 邻接矩阵为 A . 那 G 是强正则图当且仅当 A^2 是 A, I, J 的线性组合. 即

$$A^2 = kI + aA + c(J - I - A). \quad (1)$$

式 (1) 是强正则图的另一定义方式.

式 (1) 可改写成

$$A^2 - (a - c)A - (k - c)I = cJ.$$

因此, A 的不为 k 的特征值是 $f(x) = 0$ 的根. 设 $\Delta = (a - c)^2 + 4(k - c)$, 并用 θ 和 T 表示另两个特征根, 可得到

$$\theta = \frac{(a - c) + \sqrt{\Delta}}{2}, T = \frac{(a - c) - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (2)$$

且 $\theta + T = a - c, \theta T = c - k$. 由式 (2) 可以根据强正则图的参数得到它的特征值 (但具有同一参数的强正则图并不一定同构).

特征值的重数同样可从参数得到. 设 θ 的重数是 m_θ, T 的重数是 m_T . 由 k 的重数是 $1^{[3]}$, 而特征值

之和为 $\text{tr} A = 0$ 所以

$$m_\theta + m_T = n - 1, k + m_\theta\theta + m_T T = 0$$

$$m_\theta = -\frac{(n - 1)T + k}{\theta - T}, m_T = \frac{(n - 1)\theta + k}{\theta - T}. \quad (3)$$

把式 (2) 代入式 (3) 得:

$$m_\theta = \frac{1}{2} \left[(n - 1) - \frac{2k + (n - 1)(a - c)}{\sqrt{\Delta}} \right],$$
$$m_T = \frac{1}{2} \left[(n - 1) + \frac{2k + (n - 1)(a - c)}{\sqrt{\Delta}} \right]$$

由此看出, 从参数 (n, k, a, c) 可计算出 θ, m_θ, T, m_T , 从而得到强正则图的谱. 事实上, 必须保证 m_θ, m_T 是整数. 相反地, 从图的谱可得到一系列具有参数 (n, k, a, c) 的强正则图.

2 强正则图和它的补图

引理 2^[1-4] 若 G 是具有参数的强正则图, 则补图 $\bar{G}$ 也是强正则图, 具有参数 $(n, \bar{k}, \bar{a}, \bar{c})$, 这里

$\bar{k} = n - k - 1, \bar{a} = n - 2 - 2k + c, \bar{c} = n - 2k + a$. 证明 $\bar{A}$ 表示 $\bar{G}$ 的邻接矩阵, 从引理 1 推断出, 若 A^2 可表示成 A, I, J 的线性组合, 即证.

由 $J - A - I = \bar{A}$ 变形得 $A + \bar{A} = J - I$

$$(A + \bar{A})^2 = (J - I)^2. \quad (4)$$

式 (4) 可写成

$$A^2 + \bar{A}^2 + 2A\bar{A} = (J - I)^2 = (n - 2)J + I \quad (5)$$

因为 G 是强正则图, 从引理 1 可得

$$A^2 = kI + aA + c(J - I - A). \quad (6)$$

把式 (6) 代入式 (5), 变形得

$$kI + a(J - I - A) + c\bar{A} + \bar{A}^2 + 2A(J - I - \bar{A}) =$$

$$(n-2)J + I \quad (7)$$

若 G 是度为 k 的正则图, 则 $AJ = JA = kJ^{[5]}$, 类似地

$$\overline{AJ} = \overline{JA} = \overline{kJ}, \quad \overline{k} = n - k - 1$$

因此式 (7) 可改写成

$$\overline{A}^2 - (c - 2 - a)\overline{A} - (k - a - 1)I = (a + 2\overline{k} + 2 - n)J = (n - 2k + a)J.$$

由此得到

$$\overline{k} = n - k - 1, \quad \overline{a} = n - 2 - 2k + c, \\ \overline{c} = n - 2k + a.$$

引理 3^[1] 若 G 是具有参数 (n, k, a, c) 的强正则图, 则以下等价:

- 1) G 是不连通的;
- 2) $c = 0$
- 3) $a = k - 1$
- 4) G 同构与 $mK_r, m > 1$

从这个引理, 易得:

定理 1^[6] 连通正则图是强正则的当且仅当邻接矩阵 A 恰有 3 个不同的特征值.

3 非本原的强正则图

定义 2 若强正则图 G 和它的补图都是连通图, 则图 G 称为本原的. 反之, 则非本原.

可证明只有一类非本原的强正则图. 由引理 3 可得非本原的强正则图同构于 mK_r 或是它的补图.

完全 m 部图的定义是图的点分成 m 个不相连的点集, 每个点集中的点互不相邻, 而不同点集间的每对点必相邻. 若 m 个点集中的点数分别为 $p, q, \dots, r$, 则完全 m 部图可记为 $K_{p, q, \dots, r}$. 若 $p = q = \dots, r$, 记为 $K_{m(r)}$. 不难证明, mK_r 的补图就是完全 m 部图 $K_{m(r)}$. 因此非本原强正则图仅是 $K_{m(r)}$ 或者 mK_r .

引理 4^[2] 强正则图 (n, k, a, c) 是非本原的当且仅当 $c = k$ 或者 $c = 0$

不难证明

$$k(k - a - 1) = (n - k - 1)c \quad (8)$$

设 $c = k$ 则 $a = 2k - n, \overline{c} = n - 2k + a = 0$

式 (8) 是个很重要的式子, 它表示出了强正则图的参数之间的关系.

4 完全 m 部图 $K_{m(r)}$ 及它的谱

推论 设 G 是完全 m 部图 $K_{m(r)}$, 则 G 的谱是

$k, k - n, 0$ 重数分别是 $1, \frac{k}{n-k}, (n-1) - \frac{k}{n-k} \times \frac{k}{n-k} \in \text{正整数}, k = n - r, n = m \cdot r$

证明 $K_{m(r)}$ 表示完全 m 部图, 其中每个点集是 r 个点. $K_{m(r)}$ 是 mK_r 的补图.

从引理 4 可证明 $K_{m(r)}$ 是参数为 $(n, k, 2k - n, k)$ 的强正则图, $k = n - r$.

又因为

$$\theta = \frac{(a - c) + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad T = \frac{(a - c) - \sqrt{\Delta}}{2},$$

得到 $K_{m(r)}$ 的另外两个特征值为 $k - n, 0$

从式 (3) 同样可得到 θ 的重数 m_0 是 $\frac{k}{n-k} \cdot T$ 的

重数 m_r 是 $n - 1 - \frac{k}{n-k}$. 由 $K_{m(r)}$ 的定义可得 $k = n - r$. 为了保证 m_0 是整数, 要挑选合适的 m, r

若 G 的同谱图与 G 同构, 称图 G 被它的谱特征刻画. 文献 [7] 证明了: 对于任意正整数 r , 完全多部图 $K_{r, r, \dots, r}$ 被它的谱特征刻画.

虽然前面提到具有相同参数的强正则图不一定同构, 但对于完全 m 部图 $K_{m(r)}$ 可以这么说. 也可以推断出, 反过来如果给出了 $K_{m(r)}$ 的谱, 可唯一确定 $K_{m(r)}$ 或者是它的同构图.

参考文献:

- [1] Chris Godsil, Gordon Royle. Algebraic graph theory [M]. Germany Berlin: Springer Press, 2001.
- [2] Godsil C. D. Algebraic Combinatorics [M]. USA: New York: Chapman & Hall Press, 1993.
- [3] 钟富胜. 正则图的谱性质 [J]. 信息工程大学学报, 2004 (1): 2.
- [4] Haemers W. H. Strongly regular graphs with maximal energy [J]. CentER Discussion Paper Series, 2007, 37: 1-2.
- [5] Norman Biggs. Algebraic graph theory [M]. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [6] Beineke L. W., Wilson R. J. Selected topics in graph theory [M]. UK: London: Academic Press, 1979.
- [7] Drazos Cvetković, Peter Rowlinson, Slobodan Simić. Eigenvalues of graphs [M]. UK: Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Spectra of Complete M-Partite Graph

Yuan Xiao-li Guo Darchang

(Faculty of Applied Mathematics, Guanglong University of Technology, Guangzhou 510006)

Abstract The eigenvalues of a strongly regular graph with parameters (n, k, a, c) , are k and θ, T which are the two roots of the quadratic equation $x^2 - (a + c)x - (k - c) = 0$. The multiplicities m_θ and m_T can be determined from the equations $m_\theta + m_T = n - 1$ and $k + m_\theta\theta + m_T T = 0$. And this gives an alternative method of determining its spectra. The complete multipartite graph $K_{m(r)}$ is illustrated.

Key words strongly regular graph; complete multipartite graph; spectra; imprimitive graph

(上接第 25 页)

Experimental Investigation of Unsteady Heat Transfer Performance of Three Kinds of Buried Heat Exchangers

Yang Min Chen Ying Shi Bao-xin

(Faculty of Materials and Energy, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract The performance of three kinds of heat exchangers, which were single U-tube heat exchanger, double U-tube heat exchanger and tube-in-tube heat exchanger, was studied when a source-ground heat pump system was operated as an unsteady heat rejection mode. After experimental data were arranged, the variations of the temperature of soil, outlet water as well as the heat exchange capability with time were gained. Comparison of the performance between three heat exchangers shows that the double U-tube is the best, which is 1.05 and 1.73 times as large as the single U-tube and the tube-in-tube respectively. Also flow resistances of the three heat exchangers are compared at a constant water velocity.

Key words buried heat exchanger; unsteady performance of heat transfer; flow resistance